rujan 2022.

Popravni kolokvij iz kolegija **Modalna logika**

[2] 1. (a) Definirajte modalni sistem **K**.

[3] (b) Normalnu modalnu logiku **S4** dobivamo proširenjem sistema **K** aksiomima $\Box p \to \Box\Box p$ i $\Box p \to p$. Dokažite da je logika **S4** adekvatna u odnosu na klasu svih refleksivnih i tranzitivnih okvira.

[5] (c) Dokažite da je logika **S4** potpuna u odnosu na klasu svih refleksivnih i tranzitivnih okvira.

[2] 2. (a) Definirajte pojam bisimulacije između dva Kripkeova modela.

[3] (b) Dokažite da svaka bisimulacija čuva modalnu ekvivalenciju.

[1] (c) Definirajte pojam slikovno konačnog Kripkeovog modela.

[4] (d) Dokažite Hennessy–Milnerov teorem.

[3] 3. (a) Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ neki Kripkeov model i Γ neki skup formula koji je zatvoren na potformule. Na skupu W definiramo binarnu relaciju $\sim_\Gamma$ ovako:

$w \sim_\Gamma u$ ako i samo ako za svaku formulu $\varphi \in \Gamma$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow u \Vdash \varphi$

Dokažite da je $\sim_\Gamma$ relacija ekvivalencije.

[7] (b) Za svaki svijet $w \in W$ neka je s $[w]_\Gamma$ označena pripadna klasa ekvivalencije. Neka je $W_\Gamma = \{[w]_\Gamma : w \in W\}$. Neka je $\widetilde{R} \subseteq W_\Gamma \times W_\Gamma$ binarna relacija definirana sa:

$[w]_\Gamma \widetilde{R} [u]_\Gamma$ ako i samo ako za svaku formulu φ takvu da $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$

Zatim, definiramo valuaciju V_Γ ovako:

$$V_\Gamma(p) = \begin{cases} \{[w]_\Gamma : w \in V(p)\}, & \text{ako } p \in \Gamma, \\ \emptyset, & \text{inače} \end{cases}$$

Dokažite da je $\widetilde{\mathfrak{M}} = (W_\Gamma, \widetilde{R}, V_\Gamma)$ jedna filtracija modela $\mathfrak{M}$.

[2] 4. (a) Definirajte pojam standardne translacije.

[2] (b) Odredite standardnu translaciju formule $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

[6] (c) Dokažite da za modalnu logiku vrijedi Löwenheim–skolemov teorem "na dolje", tj. da za svaki skup modalnih formula Γ za koji postoji model, nužno postoji i prebrojiv model.

[2] 5. (a) Definirajte pojam ultrafiltra.

[3] (b) Definirajte pojam ultraprodukta proizvoljne familije Kripkeovih modela.

[5] (c) Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{N} = (W', R', V')$ Kripkeovi modeli, $w \in W$ i $v \in W'$ neki svjetovi, I neprazan skup i U neki ultrafiltar nad skupom I. Označimo sa f_w konstantnu funkciju s domenom I i kodomenom W koja je definirana sa $f(i) = w$. Analogno koristmo oznaku f_v. Neka postoji bisimulacija

$$Z : \prod_U \mathfrak{M}, (f_w)_U \underline{\leftrightarrow} \prod_U \mathfrak{N}, (f_v)_U.$$

Dokažite da tada vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{N}, v$.